ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2η ΔΕΚΑΔΑ

11.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{5}{8}$ και $P(B) = P(A')$.

i) Αν τα A΄, B είναι ασυμβίβαστα, να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα και τα A, B

ii) Δείξτε ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ και ότι $P(A' \cap B') = \frac{3}{8}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού A΄ και B ασυμβίβαστα, θα ισχύει $B \cap A' = \varnothing$

$$P\,(B \cap A') = 0$$

$$P(B) - P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A')$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A) \; = \frac{3}{8} \neq 0$$

Άρα τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

ii)

$$P(A \cup B) \; = \; P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \; \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \; = \; \frac{5}{8}$$

$$P(A' \cap B') = P(A') - P(A' \cap B) =$$

$$= P(A') \; - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

12.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x\ln\kappa + 2011$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$.

i) Αν ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x =1, είναι ίσος με 4, να δείξετε ότι $\kappa = e^2$.

ii) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.
Αν Χ, Ψ ενδεχόμενα του Ω με $X \subseteq \Psi$ και οι πιθανότητες P(Χ), P(Ψ) είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της f , να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X)$, $P(\Psi)$, $P(X \cap \Psi)$, $P(X \cup \Psi)$, $P(\Psi \cap X')$ όπου Χ΄ αντίθετο του Χ.

Προτεινόμενη λύση

i)

$f'(x) = 12x^2 - 10x + \ln\kappa$

$$f'(1) = 4 \iff 12 - 10 + \ln k = 4$$

$$\ln\kappa = 2$$

$$\kappa = e^2 .$$

ii)

$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2011$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2 \iff f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		1/3		1/2		$+\infty$
f΄		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο , για $x = \frac{1}{3}$

και τοπικό ελάχιστο , για $x = \frac{1}{2}$.

Επειδή $X \subseteq \Psi$, θα είναι $P(X) \le P(\Psi)$, $X \cap \Psi = X$, $X \cup \Psi = \Psi$

Άρα $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(\Psi) = \frac{1}{2}$, $P(X \cap \Psi) = \frac{1}{3}$, $P(X \cup \Psi) = \frac{1}{2}$

και $P(\Psi \cap X') = P(\Psi) - P(\Psi \cap X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

13.

i) Στο διπλανό πίνακα να βρείτε τις τιμές των κ και λ, αν γνωρίζετε ότι είναι ακέραιες με $\bar{x} = 3$ και $CV = \frac{100}{3}\%$

ii) Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής

iii) Επιλέγουμε μία τιμή στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη ή ίση του 3;

x_i	ν_i
1	5
κ	20
3	15
λ	30
Σύνολο	70

iv) Αν οι τιμές αυξηθούν με βάση τη σχέση $y_i = 2x_i + 1$, να βρείτε την νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση, και να προσδιορίσετε την μεταβολή του CV.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1\cdot 5 + 20\cdot \kappa + 15\cdot 3 + 30\cdot \lambda}{70} = 3 \Leftrightarrow 2\kappa + 3\lambda = 16 \quad \mathbf{(1)}$$

$$CV = \frac{100}{3}\% \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S}{3} = \frac{1}{3}$$

$$S = 1 \Leftrightarrow S^2 = 1$$

$$\frac{5(1-3)^2 + 20(\kappa-3)^2 + 15\cdot(3-3)^2 + 30\cdot(\lambda-3)^2}{70} = 1$$

$$2\kappa^2 + 3\lambda^2 - 12\kappa - 18\lambda + 40 = 0 \quad \mathbf{(2)}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\lambda = 4$ και $\kappa = 2$

ii)

$$\delta = \frac{35^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau + 36^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau.}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

iii)

$$\frac{5+20+15}{70} = \frac{4}{7}$$

iv)

$$\bar{y} = 2\bar{x} + 1 = 7 \;, \quad S_y = 2S_x = 2 \;, \quad CV_y = \frac{2}{7} = \frac{200}{7}\%$$

Η μεταβολή του CV είναι $\frac{100}{3}\% - \frac{200}{7}\% = \frac{100}{21}\%$

14.

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{ -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$, για τον οποίο ισχύει $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω : $A = \{ 1, 3, x^2 - x - 3 \}$

$B = \{ 2, x+1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1 \}$

όπου x πραγματικός αριθμός

i) Να βρεθούν οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω

ii) Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x, για την οποία ισχύει $A \cap B = \{ -1, 3 \}$

iii) Για $x = -1$, να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5) = \kappa$

Τότε

$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \kappa$ και $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{\kappa}{2}$

Όμως $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$

$$\kappa + \kappa + \kappa + \kappa + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} = 1$$

$$\kappa = \frac{2}{11}$$

Άρα $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \frac{2}{11}$ και $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{11}$

ii)

Θέλουμε το $-1 \in A \cap B$, δηλαδή $-1 \in A$ και $-1 \in B$

$-1 \in A \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = -1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ ή $x = -1$

- Όταν $x = 2$, τότε $B = \{ 2, 2+1, 2.2^2 + 1 - 2, -2.2 + 1 \}$

  $B = \{ 2, 3, 7, -3 \}$

  Όπως βλέπουμε, για $x = 2$, το $-1 \notin B$

- Όταν $x = -1$, τότε $B = \left\{ 2, -1+1, 2.(-1)^2 + (-1) - 2, -2.(-1) + 1 \right\}$

  $B = \{ 2, 0, -1, 3 \}$

  Όπως βλέπουμε, για $x = -1$, το $-1 \in B$

Επομένως $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$ με $A \cap B = \{ -1, 3 \}$

Συνεπώς η ζητούμενη τιμή είναι η $x = -1$

iii)

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11} = \frac{5}{11}$$

$$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11} = \frac{7}{11}$$

$$P(A\cap B) = P(3) + P(-1) = \frac{1}{11}+\frac{2}{11}=\frac{3}{11}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$$

$$P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A-B)$$

$$= \frac{5}{11} + 1 - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$$

15.

Έστω $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, 10\}$ δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2$, $\lambda \in \Omega$.

Έστω ακόμα τα ενδεχόμενα :

$X = \{\lambda \in \Omega$ / η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ να είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{68}{3}\}$

$\Psi = \{\lambda \in \Omega$ / η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ να είναι μικρότερη ή ίση του $4\}$

i) Να μελετήσετε την f, ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, στο $[0, 5]$

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(X)$ και $P(\Psi)$

iii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(X \cap \Psi)$, $P(X \cup \Psi)$, $P(X \cap \Psi')$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = 3$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	0		1		3		5
f΄		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	

Βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει : Τοπικό ελάχιστο το $f(0) = \lambda^2$

Τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{4}{3} + \lambda^2$

Τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \lambda^2$

Τοπικό μέγιστο το $f(5) = \frac{20}{3} + \lambda^2$

ii)

Μέγιστη τιμή της f είναι η $f(5) = \frac{20}{3} + \lambda^2$

και ελάχιστη η $f(0) = f(3) = \lambda^2$

Για τον προσδιορισμό του ενδεχόμενου X, έχουμε $\frac{20}{3} + \lambda^2 \geq \frac{68}{3}$

$\lambda^2 \geq \frac{48}{3}$

$\lambda \geq 4$ ή $\lambda \geq -4$

Όμως $\lambda \in \Omega$, οπότε $\lambda = 4,\ 5,\ .\ .\ .\ ,10$

Άρα $X = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

Για τον προσδιορισμό του ενδεχόμενου Ψ, έχουμε $\lambda^2 \leq 4 \iff -2 \leq \lambda \leq 2$

Όμως $\lambda \in \Omega$, οπότε $\lambda = 1, 2$

Άρα $\Psi = \{1, 2\}$

Επομένως $P(X) = \dfrac{N(X)}{N(\Omega)} = \dfrac{7}{10}$ και $P(\Psi) = \dfrac{N(\Psi)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{10}$

iii)

$X \cap \Psi = \varnothing$, άρα $P(X \cap \Psi) = 0$

$X \cup \Psi = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, άρα $P(X \cup \Psi) = \dfrac{N(X \cup \Psi)}{N(\Omega)} = \dfrac{9}{10}$

και $P(X \cap \Psi') = P(X) - P(X \cap \Psi)$

$= \dfrac{7}{10} - 0 = \dfrac{7}{10}$

16.

Στις εξετάσεις στατιστικής πήραν μέρος 40 φοιτητές . Οι 12 από αυτούς πήραν βαθμό κάτω από 4 και οι τέσσερις βαθμό κάτω του 2 . Το 40% των φοιτητών πήρε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4 αλλά μικρότερο του 6 . Η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στους φοιτητές που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 είναι 36^o . Η κλίμακα βαθμολογίας είναι από 0 έως και 10 , με βάση το 5

i) Να φτιάξετε πίνακα συχνοτήτων της βαθμολογίας

ii) Να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα

iii) Να βρείτε την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής

iv) Επιλέγουμε ένα φοιτητή στην τύχη . Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να μην πέρασε το μάθημα ;

v) Αν οι φοιτητές που είχαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο 7 παίρνουν βραβείο , και επιλέξουμε ένα φοιτητή στη τύχη, ποια είναι η πιθανότητα αυτός να πήρε βραβείο;

Προτεινόμενη λύση

i)

Από τα δεδομένα στην κλάση [0, 2) βρίσκονται 4 φοιτητές ενώ

στην κλάση [2, 4) βρίσκονται 8 φοιτητές

Το 40% δηλαδή $\frac{40}{100}\cdot 40 = 16$ φοιτητές βρίσκονται στην κλάση [4, 6)

Αν ν_i είναι οι φοιτητές με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8, τότε

$36 = 360\,\frac{\nu_i}{40} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_i = 4$

Τέλος στην κλάση [6, 8) βρίσκονται $40 - 4 - 8 - 16 - 4 = 8$ φοιτητές

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρωμένος και με τις στήλες $\nu_i x_i$ και $\nu_i x_i^2$

Κλάσεις [,)	Κεντρ τιμή x	Συχντ νi	$\nu_i x_i$	$\nu_i x_i^2$
[0, 2)	1	4	4	4
[2, 4)	3	8	24	72
[4, 6)	5	16	80	400
[6, 8)	7	8	56	392
[8, 10)	9	4	36	324
Σύνολο		40	200	1192

ii)

Λόγω ισοκατανομής των παρατηρήσεων το μάθημα το πέρασαν

$$\frac{1}{2}\cdot 16 + 8 + 4 = 20 \text{ φοιτητές}$$

iii)

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i = \frac{200}{40} = 5$$

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{40}\left(1192 - \frac{200^2}{40}\right) = 4,8$$

$$S = \sqrt{4,8} \approx 2,19$$

$$CV = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{2,19}{5} \approx 0,44 = 44\%$$

iv)

$$\frac{4 + 8 + \frac{1}{2}\cdot 16}{40} = \frac{1}{2}$$

v)

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 8 + 4}{40} = \frac{1}{5}$$

17.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2P(A\cup B) + 2x\left[P(A-B)+\frac{1}{3}\right]+1$

i) Να βρείτε την $f\,'(1)$

ii) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 45^o, δείξτε ότι $P(B)=\frac{1}{3}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f'(x) = x^2 - 2xP(A\cup B) + 2\left[P(A-B)+\frac{1}{3}\right]$$

$$f'(1) = 1-2P(A\cup B)+2\left[P(A-B)+\frac{1}{3}\right]$$

$$= 1-2P(A\cup B)+2P(A-B)+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}-2P(A\cup B)+2P(A-B)$$

ii)

$$f\,'(1) = \text{εφ}45^o \Leftrightarrow \frac{5}{3}-2P(A\cup B)+2P(A-B)=1$$

$$\frac{5}{3}-2[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]+2P(A)-2P(A\cap B)=1$$

$$\frac{5}{3}-2P(A)-2P(B)+2P(A\cap B)+2P(A)-2P(A\cap B)=1$$

$$2P(B)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

18.

Έχουμε 30 σφαίρες σ' ένα δοχείο αριθμημένες από το 1 έως το 30 . Επιλέγουμε μία σφαίρα στην τύχη . Έστω τα ενδεχόμενα

A : ο αριθμός της σφαίρας είναι άρτιος

B : ο αριθμός της σφαίρας είναι πολλαπλάσιο του 5 .

i) Να βρείτε τις πιθανότητες

$P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cup B')$, $P[(B\cap A')\cup(A\cap B')]$

ii) Αν οι τιμές $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cup B')$, $P(A\cap B)$ είναι οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας κατανομής περίπου κανονικής, οι οποίες έχουν τιμές μεγαλύτερες από τη $\bar{x}+2S$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και S η τυπική απόκλιση , να βρείτε το μέγεθος του δείγματος .

Προτεινόμενη λύση

i)

$A=\{2,\ 4,\ 6,\dots,\ 28,\ 30\}$ με $N(A)=15$

$B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$ με $N(B)=6$

$A\cap B=\{10,\ 20,\ 30\}$ με $N(A\cap B)=3$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)$$

$$=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$P[(B\cap A')\cup(A\cap B')]=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{2}{10}=\frac{1}{2}$$

ii)

Σε μια κανονική κατανομή , τιμή μεγαλύτερη από την $\bar{x}+2S$ έχει το 2,5% του δείγματος . Το πλήθος των δοσμένων παρατηρήσεων είναι 5, οπότε αν ν είναι το μέγεθος του δείγματος τότε $\frac{2{,}5}{100}\cdot\nu=5 \Leftrightarrow \nu=200$

19.

Έστω $\Omega=\{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\nu x+\nu x^2}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=6$, δείξτε ότι $\Omega=\{1, 2, 3\}$

iii) Αν $P(1)=\dfrac{\lambda}{5\lambda+1}$, $P(2)=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$, $P(3)=\dfrac{1}{\lambda+2}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(1)$, $P(2)$ και $P(3)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $1+x+x^2 \geq 0$ και $\sqrt{1+x+x^2}-1 \neq 0$

Επειδή η διακρίνουσα του τριώνυμου $1+x+x^2$ είναι $\Delta=-3<0$,

θα είναι $1+x+x^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+x+x^2}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x+x^2}\neq 1$$

$$x^2+x+1\neq 1$$

$$x^2+x\neq 0$$

$$x(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \text{ και } x\neq 0$$

Οπότε $A_f = (-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, +\infty)$

ii)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\nu x+\nu x^2}{\sqrt{1+x+x^2}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\nu x+\nu x^2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\nu x(1+x)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{1+x+x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\nu x(1+x)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\nu(\sqrt{1+x+x^2}+1) = 2\nu$$

Άρα $2\nu=6 \Leftrightarrow \nu=3$, οπότε $\Omega=\{1, 2, 3\}$

iii)

$$P(1)+P(2)+P(3)=1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{5\lambda+1}+\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+2}=1$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+1)=0$$

$$\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-2-\sqrt{3} \text{ ή } \lambda=-2+\sqrt{3}$$

Αν $\lambda = -2 - \sqrt{3}$ τότε $P(3) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ που είναι αδύνατο

Αν $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ τότε $P(2) = \frac{-2+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} < 0$ επίσης αδύνατο

Άρα $\lambda = 1$, οπότε $P(1) = \frac{1}{6}$, $P(2) = \frac{1}{2}$ και $P(3) = \frac{1}{3}$

20.

Έστω $\Omega = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, 10, 12, 14, 16\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τα οποία είναι τιμές μιας μεταβλητής X .

i) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής

ii) Αν S είναι η τυπική απόκλιση, δείξτε ότι $S^2 = 2\bar{x} + 3$

iii) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{\alpha \in \Omega /\ \alpha = \text{πολλαπλάσιο του } 4\}$$

$$B = \left\{\beta \in \Omega /\ \beta \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης } \frac{(x^2-6x+8)(x-3)}{x-2} = 0\right\}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10+12+14+16}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\delta = \frac{4^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau + 5^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau}{2} = \frac{8+10}{2} = 9$$

$R = 16 - 2 = 14$

ii)

$$S^2 = \frac{(2-9)^2+(4-9)^2+(6-9)^2+\ldots+(14-9)^2+(16-9)^2}{8} = 21$$

$2\bar{x}+3 = 2\cdot 9+3 = 21 = S^2$

iii)

Είναι $A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

$$\frac{(x^2-6x+8)(x-3)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x^2-6x+8)(x-3) = 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Οπότε $B = \{4\}$

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$

Επειδή $A \cap B = B$ θα είναι $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$ και $A \cup B = A$,

άρα $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$ και $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$